evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika
na PřF Univerzity Palackého v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

Determinant matice a inverzní matice

Michal Botur

Přednáška 3

KAG/DLA1M: Lineární algebra 1

1 Determinant matice

Determinant je hodnota, kterou velmi specifickým způsobem přiřadíme čtvercové matici (formálně je determinant zobrazení $\mathcal{M}_n(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{T}$). Determinanty jsou extrémně sofistikovaný nástroj, pomocí kterého lze řešit pokročilé problémy lineární algebry. Žádám vás proto o trpělivost, poněvadž zavedení determinantu je zcela neintuitivní. Jeho smysl ukáží až hlubší výsledky.

V lekci si zavedeme pojem determinant čtvercové matice a naučíme se determinant matice spočítat.

K zavedení pojmu determinant je poznamenat několik pojmů z teorie permutací. Permutace na množině A je libovolné bijektivní zobrazení $A \longrightarrow A$. Jestliže je A konečná, n prvková množina, potom na ní existuje právě $n!$ různých permutací. Každá permutace na množině $\{1, \ldots, n\}$ se dá vyjádřit jako posloupnost prvků $a_1 \ldots a_n$, kde platí $a_1, \ldots, a_n \in \{1, \ldots n\}$ a každý prvek z množiny $\{1, \ldots, n\}$ se v posloupnosti vyskytuje právě jednou. Takováto posloupnost se nazývá *pořadí*. Pořadí $a_1 \ldots a_n$ potom představuje permutaci

$$1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, \ldots, n \mapsto a_n.$$

Demonstrujme si výše zmíněné na konkrétním příkladu množiny $\{1, 2, 3\}$. Existují tyto pořadí

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Například pořadí 213 definuje permutaci

$$1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3.$$

Jestliže v pořadí přehodíme kterékoliv dva prvky, potom říkáme, že provádíme inverzi na pořadí. Vezmeme-li libovolné pořadí $a_1 \ldots a_n$ a budeme-li chtít pomocí inverzí získat základní pořadí $123 \ldots n$, potom číslo $(-1)^p$, kde p je počet provedených inverzí je stále stejné (nezávislé na konkrétní posloupnosti při provádění inverzí).

Jestliže máme permutaci P na množině $\{1, \ldots, n\}$, potom označme právě

$$\operatorname{sgn} P = (-1)^p$$

a tuto hodnotu potom nazýváme *znaménkem permutace*. Někdy také říkáme, že permutace je *sudá* jestliže $\operatorname{sgn} P = 1$ a *lichá* v případě $\operatorname{sgn} P = -1$. Touto terminologií zdůrazňujeme, že právě sudost či lichost počtu inverzí se nemění.

Definice 3.1 Mějme matici $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{T})$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

potom *determinantem matice* A (značíme $|A|$) rozumíme hodnotu

$$|A| = \sum_P \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)} \cdot a_{2P(2)} \cdot \cdots \cdot a_{nP(n)}.$$

Ve výrazu sčítáme přes všechny permutace na množině $\{1, \ldots, n\}$.

Z definice lze přímo odvodit vztahy pro permutace na „malých“ maticích:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Počet sčítanců nám roste faktoriálem (!!!) s velikosti matice. Proto je třeba najít vhodnější způsob k výpočtu determinantů. Přímo z definice lze vypozorovat několik tvrzení. Nadále předpokládejme, že všechny matice, které se v textu objeví jsou čtvercové.

Věta 3.1 *Jestliže má matice A nulový řádek, potom $|A| = 0$.*

Věta 3.2 *Jestliže je matice A v trojúhelníkovém tvaru, potom $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$.*

Věta 3.3 *Pro každou matici A platí $|A| = |A^T|$.*

Věta 3.4 *Jestliže matice B vznikla z matice A přehozením dvou řádků, potom platí $|B| = -|A|$.*

Věta 3.5 *Jestliže matice B vznikla z matice A vynásobení některého řádku hodnotou k, potom platí $k \cdot |A| = |B|$.*

Věta 3.6 *Jestliže matice B vznikla z matice A přičtením libovolného násobku některého řádku k* **jinému** *řádku matice, potom platí $|A| = |B|$.*

Poslední věta, kterou budeme hojně používat při výpočtu determinantu je tzv. Laplaceova věta.

Věta 3.7 *Mějme matici A. Označíme-li si pro libovolné $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ matici A_{ij}, která vznikne z matice A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce, potom pro libovolné $k \in \{1, \ldots, n\}$ platí*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}|.$$

Uvedené vztahy zavádí takzvaný Laplaceův rozvoj podle k-tého řádku (resp. k-tého sloupce). Výsledkem je, že determinant matice stupně n lze převést na součet determinantů matic nižších stupňů. Například rozvoj následující matice podle třetího řádku vypadá

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ještě výrazně efektivnější způsob determinantu je kombinace Laplaceova rozvoje a Věty 3.6. Pomocí této větu můžeme analogicky ke Gausově eliminační metodě vytvářet v matici nuly a tím si zjednodušovat Laplaceův rozvoj. Například v následující matici ve druhém kroku využijeme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce a ve třetím kroku Laplaceův rozvoj podle třetího řádku.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -((-2)\cdot(-3)+0\cdot(-4)) = -6.$$

Poslední věta je ve skutečností nejdůležitějším poznatkem z teorie determinantů

Věta 3.8 *Jestliže A a B jsou matice, potom platí $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.*

Definice 3.2 Matice se nazývá *regulární* jestliže $|A| \neq 0$. V opačném případě nazýváme maticí *singulární*.

Věta 3.8 nám navíc přímo dokazuje následující tvrzení.

Věta 3.9 *Množina všech singulárních matic je uzavřena na násobení.*

2 Inverzní matice

Inverzní matice jsou inverzní prvky v monoidu čtvercových matic s operací násobení. V této kapitole si ukážeme kdy tyto matice existují, jakým způsobem je lze nalézt a ukážeme si jakým způsobem souvisí s determinanty.

Definice 3.3 Matice A^{-1} se nazývá inverzní matice k matici A jestliže platí $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$.

Z Věty 3.6 ihned plyne:

Věta 3.10 *Jestliže k matici A existuje inverzní matice A^{-1}, potom*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

V důsledku potom, $|A| \neq 0$ a tedy matice A je regulární.

První způsob jak nalézt inverzní matici nabízí ve svém důsledku Laplaceova věta.

Věta 3.11 *Jestliže matice A je regulární, potom existuje inverzní matice a navíc platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \cdots & \mathcal{A}_{1n} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \cdots & \mathcal{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{m1} & \mathcal{A}_{m2} & \cdots & \mathcal{A}_{mn} \end{pmatrix}^T ,$$

kde $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$ jsou členy z Laplaceova rozvoje.

Věta 3.12 *Regulární matice vzhledem k násobení tvoří grupu*

Věta 3.13 *Matice je invertibilní tehdy a jen tehdy, je-li regulární.*

Druhý často rychlejší způsob výpočtu inverzní matice nabízí Gaussova eliminační metoda.

Věta 3.14 *Mějme matici A. Pokud existuje posloupnost řádkově ekvivalentních úprav mezi maticemi*

$$(A|E) \sim \cdots \sim (E|B),$$

potom platí, že $B = A^{-1}$. Svislá čára uprostřed obdélníkové matice je pouze pomocná. Řádkově ekvivalentní úpravy se musí provádět s celým řádkem na obou stranách matice.

Demonstrujme si tuto větu na následujícím výpočtu inverzní matice. Z úprav

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Jak lze skutečně ověřit vynásobením matic, platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reference

[1] D. Hort, J. Rachůnek: Algebra I., [Univerzita Palackého V Olomouci, 2003].

[2] Bican L.: Lineární algebra, [SNTL Praha, 1979.].

[3] Waerden, L.: Algebra I., [Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971.].